**Exercícios Métodos Numéricos**

1ª Questão) Seja *K*  a constante de equilíbrio de uma reação química e *p1* a pressão total da mistura. Se *p1 = 3,5 atm* e *K = 0,04* determine a fração molar *x* de um elemento que se dissocia, se a mesma pode ser representada pela expressão :

Utilize na resolução o método de Newton-Raphson, implementado em planilha, apresentando todos os passos intermediários. Escolha livremente o ponto inicial de iteração.

2ª Questão) Um sistema de reservatórios interliga quatro lagos e dois rios. Os balanços de massa podem ser escritos para cada reservatório e o seguinte conjunto de equações algébricas lineares simultâneas é obtido :



Neste sistema, c1 é a concentração no lago 1, c2 é a concentração no lago 2, etc... A carga de produtos no lago 1 é dada pelo produto de 13,422.c1, no lago 2 por 12,525.c2, etc... Com base nestes dados pede-se :

1. Usar o método da inversão de matrizes, em planilha, para obter a concentrações c1, c2, c3 e c4 nos 4 lagos
2. Em quanto deve ser reduzida a carga no lago 1 para que a concentração do lago 4 seja de 75?

3ª Questão) O torque transmitido a um motor de indução é dado pela relação s=(n-nr)/n onde n é a freqüência do estator e nr a velocidade de giro do motor e s é o escorregamento, ou seja o quanto o rotor se atrasa em relação ao estator. Sabe-se que o torque T pode ser expresso em função do escorregamento pela fórmula :

1. Encontre o escorregamento que provoca o maior torque pelo Solver do Excel
2. Encontre o escorregamento que provoca o maior torque utilizando a definição numérica de derivada e o Atingir Meta do Excel.

1ª Questão) A velocidade para cima de um foguete pode ser calculada pela fórmula:

Nde *v é* a velocidade para cima, *u* é a velocidade na qual o combustível é expelido com relação ao foguete, *m0* é a massa inicial do foguete no instante *t=0 , q* é a taxa de consumo de combustível e *g* é a aceleração da gravidade para baixo ( suposta constante e igual a 9,8 m/s2 ). Se *u* = 2.000m/s, *m0* = 150.000kg e *q* = 2.700kg/s, calcule o instante no qual a velocidade é igual a 750m/s.

Utilize na resolução o método de Newton-Raphson, implementado em planilha, apresentando todos os passos intermediários. Escolha o ponto inicial de iteração entre 10 e 50s.

2ª Questão) Um sistema massa mola tem aplicada uma força *F=*1500N. No equilíbrio as equações de balanço de força se reduzem a :

*k2(x2-x1) = k1.x1*

*k3(x3-x2)=k2(x2-x1)*

*k4(x4-x3)=k3(x3-x2)*

*F=k4(x4-x3)*

1. Se k1=100, k2=50, k3=80, k4=200, calculi os x’s pelo método da inversão de matrizes, no Excel.
2. Se a força se alterar para 2000N em quanto o k4 deverá ser alterado para que na solução, x2 permaneça inalterado?

3ª Questão) Um companhia esta desenvolvendo um novo aditivo para combustível, composto de três ingredientes, X, Y e Z. Para o pico de desempenho, a quantidade total de aditivo deve ser de pelo menos 6ml por litro de combustível. Por razões de segurança a soma dos ingredientes X e Y deve ser no máximo de 2,5ml por litro de combustível. Por razões de economia a quantidade de X deve ser maior ou igual a Y e a quantidade de Z deve ser maior que a metade de Y. Se o custo por ml para os ingredientes X, Y e Z for de $0,05, $0,025 e $ 0,15 calcule as quantidades a serem utilizadas na mistura para que se obtenha o custo mínimo.

1ª Questão) A velocidade *v* de um pára-quedista em queda livre é dada por :

Onde g=9,8m/s2. Para um pára-quedista com um coeficiente de arrasto de c = 15Kg/s calcule a massa *m* para que a velocidade seja *v* = 35m/s em *t=*9s.

Utilize na resolução o método de Newton-Raphson, implementado em planilha, apresentando todos os passos intermediários. Escolha livremente o ponto inicial de iteração.

2ª Questão) Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de 4.800, 5.800 e 5.700 m3 de areia, cascalho e brita, respectivamente para terminar a construção. Existem três minas de onde estes materiais podem ser obtidos. A composição dos materiais destas minas é :



1. Quantos metros cúbicos de cada mina devem ser minerados para atender as necessidades do engenheiros? Utilize na resolução o método da matriz inversa.
2. Repita a questão anterior utilizando o Solver.

3ª Questão) A taxa de crescimento *g* de uma cultura específica que produz um antibiótico é função da concentração de alimento *c.*

1. Encontre o valor *c* no qual o crescimento *g* é um máximo pelo Solver
2. Repita a questão anterior utilizando a definição numérica de derivada e o Atingir Meta do Excel.

1ª Questão) Na engenharia ambiental a seguinte equação pode ser usada para calcular o nível de oxigênio *c* (mg/L) em um rio abaixo do ponto de descarga de esgoto :

onde *x* é a distância do ponto de descarga em quilômetros. Com base nestes dados pede-se :

1. **(2 ptos)** Determinar a distância *x* onde o oxigênio cai pela primeira vez até o valor de 5 mg/L utilizando o método de Newton-Raphson. Utilize com estimativa inicial para o valor de *x,* a distância de 2 km.

1. **(2 ptos)** Repetir a questão anterior utilizando o método da bissecção
2. **(2 ptos)** Determinar a distância *x* onde a concentração *c* do oxigênio está em um mínimo e a concentração *c* obtida, através do Solver
3. **(2 ptos)** Repetir a questão anterior utilizando a definição numérica de derivada e o recurso Atingir Meta

2ª Questão) Um engenheiro supervisiona a produção de três tipos de componentes elétricos. Três tipos de material ( metal, plástico e borracha ) são necessários para a produção. As quantidades necessárias para a produção de cada componente são :



1. **(1 pto)** Se um total de 3.89kg de metal, 0.095kg de plástico e 0.282 kg de borracha estão disponíveis a cada dia, quantos componentes de cada tipo poderão ser produzidos por dia? Resolva o problema através do método da inversão de matrizes

1. **(1 pto)** Repita o problema anterior utilizando o Solver.

Fórmulas :

Para Newton Raphson : f(xi+1) = xi – f(xi)/f’(xi)

f’(x) = [ f(x+h) – f(x-h) ] / (2h)

Para bissecção xl e xh -> xr = (xl + xh)/2

Se f(xl)\*f(xr) < 0 então xh = xr, xl fica igual

senão xl = xr, xh fica igual

Resolução de sistemas de equações

A.x = B 🡪 x = A-1.B onde A-1 é a matriz inversa de A

1ª Questão) Um objeto é suspenso em um túnel de vento e a força é medida para diversos níveis de velocidade do vento. Os resultados estão tabulados a seguir :



Com base nos dados da tabela acima pede-se :

1. **(0,5 ptos)** Encontrar os parâmetros b0 e b1 que ajustam os pontos acima a uma reta F = b0 + b1.v
2. **(0,5 ptos)** Encontrar os parâmetros b0 e b1 que ajustam os pontos acima a uma função potência onde F = b0.vb1
3. **(0,5 ptos)** Faça um gráfico de dispersão com os dados da tabela plotados como pontos e os dados provenientes da reta e curva de ajuste como linhas contínuas
4. **(0,5 ptos)** Qual dos dois ajustes é melhor? Justifique em termos **numéricos** sua resposta.

2ª Questão) O pH de um reator varia senoidalmente no decorrer de um dia. A tabela abaixo apresenta o valor o pH ao longo do dia, hora a hora.



Com base nos dados da tabela acima e presumindo-se que os dados se repitam dia-a-dia, ( isto é o período fundamental, *T*, é de 24 horas, pede-se :

1. **(0,5 ptos)** Encontrar os parâmetros b0 e b1 que ajustam pH = b0 + b1.sen(2\*pi/T)
2. **(0,5 ptos)** Encontrar os parâmetros b0 , b1 e b2 que ajustam pH = b0 + b1.sen(2\*pi/T) + b2.sen(4\*pi/T)
3. **(0,5 ptos)** Faça um gráfico de dispersão com os dados da tabela plotados como pontos e os dados provenientes de cada curva de ajuste como linhas contínuas
4. **(0,5 ptos)** Comparando os parâmetros b0 e b1 obtidos no item b com b0, b1 e b2 obtidos no item c, o acréscimo de mais um seno melhorou significativamente o ajuste da regressão aos pontos dados? Justifique em termos **numéricos** a sua resposta.

3ª Questão) A seguinte equação pode ser usada para modelar a deflexão *y* do mastro da vela de um barco sujeita à força do vento, a partir da altura *z* do mesmo :

onde :

*f* -> força do vento, uma função da altura *z* dada acima

E-> módulo de elasticidade = 1,25 x 108

I-> momento de inércia = 0,05

L-> comprimento do mastro = 30

Sabendo-se que y(z)=0 e y’(z)=0 para z=0, pede-se

1. **(1,5 ptos)** Calcular a deflexão de z =0 até z = 30, através do método de Euler, com h=0,1
2. **(0,5 ptos)** Traçar a curva do resultado obtido na letra a, da deflexão *y* em função da altura *z*

4ª Questão) Um circuito RL ( resistor x indutor ) possui uma resistência R não-linear. A equação que descreve este circuito é dada por :

Sabendo-se que :

L = 1 ; R = 1,5 ; I = 1 e i(0) = 0,5 pede-se :

1. **(1,5 ptos)** Calcular a corrente i(t) para t de 0 a 10s, com h=0,1, através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem

1. **(1,5 ptos)** Calcular a corrente i(t) para t de 0 a 10s, com h=0,1, através do método de Euler
2. **(0,5 ptos)** Traçar a curva dos resultados obtidos nas letras a e b, da corrente *i* em função do tempo *t* para t variando de 0 a 10 segundos.
3. **(0,5 ptos)** Para qual valor de t a diferença % entre o método de Euler e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem ultrapassa 10%? ( Tome com base o método de Runge-Kutta de 4ª ordem )

Fórmulas :

Método de Euler : f(t+h) = f(t) + h.f’(t)

Método de Runge Kutta : f’(x) = f(x,y)

K1 = f(x,y)

K2 = f(x+0,5\*h\*k1,y+0,5\*h\*k1)

K3 = f(x+0,5\*h\*k2,y+0,5\*h\*k2)

K4 = f(x+h\*k3, y+h\*k3)

f(x+h) = f(x) + h/6\*(k1+2\*k2+2\*k3+k4)

Regressão Linear : Via Solver :

Função de Regressão => ycalculado = β0+β1.x

Min Σ(Erroi2) onde Erroi2 = ( yi\_observado – yi\_calculado )2

Variáveis = β0,β1

Via Matriz de Regressão :

β = (Xt.X)-1.(Xt.Y)

Onde :

β = vetor coluna dos coeficientes β0,β1 da regressão

Y = vetor coluna dos valores observados da variável dependente

X = matriz dos valores das variáveis independentes. A primeira coluna desta matriz é formada somente por números 1

1ª Questão) Você mediu a queda de voltagem *V* através de um circuito para diversos valores diferentes de corrente *I.* Os resultados são apresentados na tabela a seguir.



Com base nos dados da tabela acima pede-se :

1. **(0,5 ptos)** Utilizar interpolação de primeiro grau para encontrar uma estimativa para *v* , quando a corrente *i* for igual a 1,15A. O polinômio de interpolação é V = b0 + b1.I
2. **(0,5 ptos)** Utilizar interpolação de terceiro grau para encontrar uma estimativa para *v ,* quando a corrente *i* for igual a 1,15A. O polinômio de interpolação é V = b0 + b1.I + b2.I2 + b3.I3.
3. **(0,5 ptos)** Supondo que os dados da tabela acima não sejam precisos, utilizar regressão linear (V = b0 + b1.I ) para estimar a tensão *v*  quando a corrente *i* for igual a 1,15A. Utilize o método com o Solver.
4. **(0,5 ptos)** Supondo que os dados da tabela acima não sejam precisos, utilizar regressão exponencial (V = b0.eb1.I ) para estimar a tensão *v* quando a corrente *i* for igual a 1,15A. Utilizar o método com o solver.
5. **(0,5 ptos)** Qual das duas estimativas obtidas por interpolação é a melhor? Justifique em termos **qualitativos** sua resposta.
6. **(0,5 ptos)** Qual das duas estimativas obtidas por regressão é a melhor? Justifique em termos **numéricos** sua resposta.

2ª Questão) A radiação solar em uma cidade foi tabulada como :



Considere Janeiro como o mês 0 (zero), Fevereiro como o mês 1 (um) e assim por diante e os valores de radiação como o valor para o primeiro dia de cada mês. Com base nos dados da tabela acima e sabendo-se também que os valores presumindo-se que os dados se repitem ano-a-ano, ( isto é o período fundamental, *T*, é de 12 meses ), pede-se :

1. **(0,5 ptos)** Encontrar os parâmetros b0 e b1 que ajustam pH = b0 + b1.sen[(2\*pi/T)\*t] pelo método do Solver
2. **(0,5 ptos)** Encontrar os parâmetros b0 e b1 que ajustam pH = b0 + b1.cos[(2\*pi/T)\*t] também pelo método do Solver
3. **(0,5 ptos)** Faça um gráfico de dispersão com os dados da tabela plotados como pontos e os dados provenientes de cada curva de ajuste como linhas contínuas
4. **(0,5 ptos)** Comparando os parâmetros b0 e b1 obtidos no item a com b0, e b1 obtidos no item b, qual das duas regressões melhor ajusta os dados? Justifique em termos **numéricos** a sua resposta.

3ª Questão) Dada a seguinte integral :

Pede-se :

1. **(0,5 ptos)** Calcular a integral pelo método dos trapézios com o passo h = 0.1
2. **(0,5 ptos)** Qual a diferença percentual entre o valor calculado no item a e o valor exato? (vide as fórmulas de integração no formulário ao fim da prova)

4ª Questão) Um circuito RL ( resistor x indutor ) possui uma resistência R não-linear. A equação que descreve este circuito é dada por :

Sabendo-se que :

L = 1 ; R = 1,5 ; I = 1 e i(0) = 0,5 pede-se :

1. **(1,5 ptos)** Calcular a corrente i(t) para t de 0 a 10s, com h=0,1, através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem

1. **(1,5 ptos)** Calcular a corrente i(t) para t de 0 a 10s, com h=0,1, através do método de Euler
2. **(0,5 ptos)** Traçar a curva dos resultados obtidos nas letras a e b, da corrente *i* em função do tempo *t* para t variando de 0 a 10 segundos.
3. **(0,5 ptos)** Para qual valor de t a diferença % entre o método de Euler e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem ultrapassa 10%? ( Tome com base o método de Runge-Kutta de 4ª ordem )

Fórmulas :

Método de Euler : f(t+h) = f(t) + h.f’(t)

Método de Runge Kutta : f’(x) = f(x,y)

K1 = f(x,y)

K2 = f(x+0,5\*h\*k1,y+0,5\*h\*k1)

K3 = f(x+0,5\*h\*k2,y+0,5\*h\*k2)

K4 = f(x+h\*k3, y+h\*k3)

f(x+h) = f(x) + h/6\*(k1+2\*k2+2\*k3+k4)

Regressão Linear : Via Solver :

Função de Regressão => ycalculado = β0+β1.x

Min Σ(Erroi2) onde Erroi2 = ( yi\_observado – yi\_calculado )2

Variáveis = β0,β1

Via Matriz de Regressão :

β = (Xt.X)-1.(Xt.Y)

Onde :

β = vetor coluna dos coeficientes β0,β1 da regressão

Y = vetor coluna dos valores observados da variável dependente

X = matriz dos valores das variáveis independentes. A primeira coluna desta matriz é formada somente por números 1

Integração:

Área do trapézio = fmédio.Δx

fmédio = [ f(xi) + f(xf) ]/2

Δx = xf – xi

Integral = Soma das áreas dos trapézios

1ª Questão) Resolva a equação diferencial parcial : para uma região quadrada na qual *T(0,y)=100, T(1,y)=50* e *T(x,0)=T(x,1)=0*. O grid da solução deverá ter pelo menos 16 pontos internos. (Sugestão: resolva no Excel, com a opção de cálculo iterativo ativada)

2ª Questão) Resolva a equação diferencial ordinária apresentada a seguir pelo método de Euler: com condição inicial

3ª Questão) Resolva a equação diferencial ordinária apresentada a seguir como um sistema de equações diferenciais, pelo Método de Runge-Kutta 4ª ordem: com condições iniciais e . (Sugestão: resolva no Excel através de uma função VBA)

4ª Questão) Resolva a equação diferencial parcial: para as seguintes condições: *K=1; dt=0,15; dx=0,7;* *L=35;* comprimento da barra; *t=[0;15]* (tempo no qual pede-se a solução) e condições de contorno: *T(x,0)=0*, exceto em *T(17,5;0)=50* Desenhe os gráficos de distribuição da temperatura para t = 0; 1; 2; 4; 8 e 15.

5ª Questão) Resolva a equação diferencial: com condições de contorno *T(0)=40* e *T(10)=200* através do método dos elementos finitos, dividindo o domínio da solução em pelo menos 4 elementos.

1ª Questão) (2,5 pontos) Calcule uma das raízes da equação, através do método de Newton-Raphson:

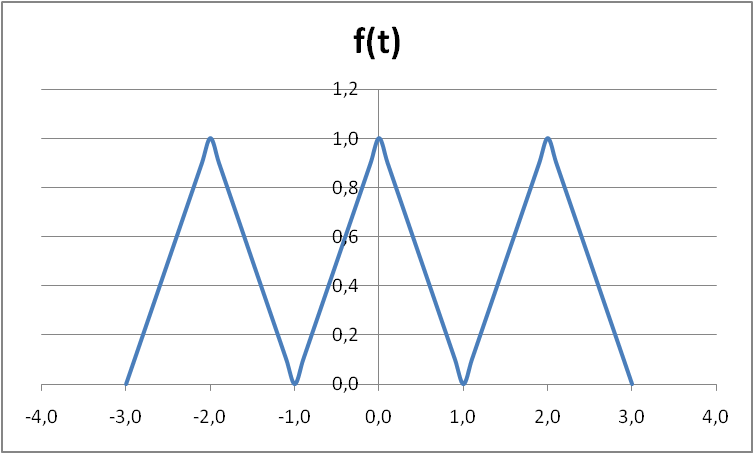
2ª Questão) (2,5 pontos) Resolva o sistema de equações lineares apresentado abaixo, pelo método da inversão de matrizes e pelo solver:

3ª Questão) (2,5 pontos) Dada a seguinte integral :

Pede-se :

1. Calcular a integral pelo método dos trapézios com o passo h = 0.1
2. Qual a diferença percentual entre o valor calculado no item a e o valor exato?

4ª) Encontre os cinco primeiros termos não nulos da série de Fourier para o sinal abaixo e monte o gráfico da série:



1ª Questão) Encontre a raiz da função dada abaixo, pelo método de Newton-Raphson. A raiz deverá ter precisão de pelo menos 0,1%. Escolha livremente o ponto inicial.

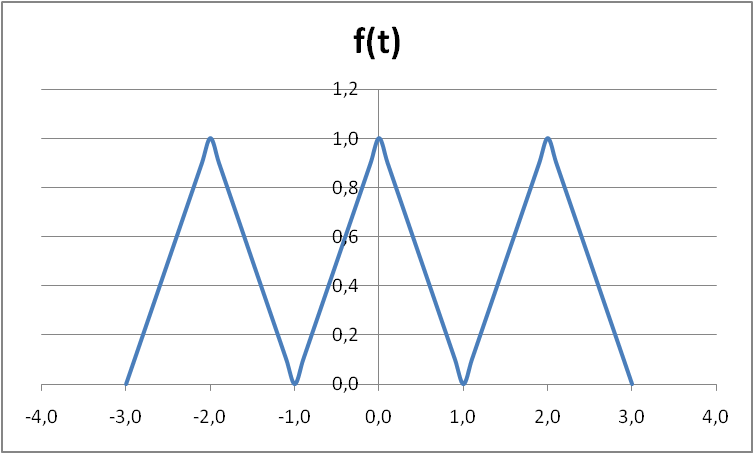
2ª Questão) Resolva o sistema de equações abaixo, pelo método de inversão das matrizes:

3ª Questão) Calcule a integral abaixo pelo método da quadratura de Gauss.

4ª Questão) Encontre os parâmetros *b*0 e *b*1 que ajustam a função F = *b*0 + *b*1.v aos dados da tabela abaixo (utilize o método de sua preferência):



5ª Questão) Encontre os cinco primeiros termos não nulos da série de Fourier para o sinal abaixo e monte o gráfico da série:



1ª Questão) (2,5 pontos) Calcule uma das raízes da equação, através do método de Newton-Raphson. :

2ª Questão) (2,5 pontos) Resolva o sistema de equações lineares apresentado abaixo, pelo método da inversão de matrizes e pelo solver:

3ª Questão) (2,5 pontos) Dada a seguinte integral :

Pede-se :

1. Calcular a integral pelo método dos trapézios com o passo h = 0.1
2. Qual a diferença percentual entre o valor calculado no item a e o valor exato?

4ª) Questão) (2,5 pontos) Calcule os esforços na base da treliça abaixo:



1ª Questão) Resolva a equação diferencial parcial :

Para uma região quadrada na qual *T(0,y)* = 100 , *T(1,y)* = 50 e T(x,0) = T(x,1) = 0. O grid da solução deverá ter pelo menos 16 pontos internos.

2ª Questão) Resolva a equação diferencial ordinária pelo método de Runge-Kutta 4ª ordem :

;

3ª Questão) Resolva a equação diferencial ordinária abaixo como um sistema de equações diferenciais, pelo Método de Runge-Kutta 4ª ordem :

4ª Questão) Resolva a equação diferencial parcial :



para as seguintes condições :

K=1; dt=0,15; dx=0,7

L=35; comprimento da barra; t=[0;15] (tempo no qual pede-se a solução)

T(x,0)=0, exceto em T(17,5;0)=50

Desenhe os gráficos de distribuição da temperatura para t = 0; 1; 2; 4; 8 e 15.